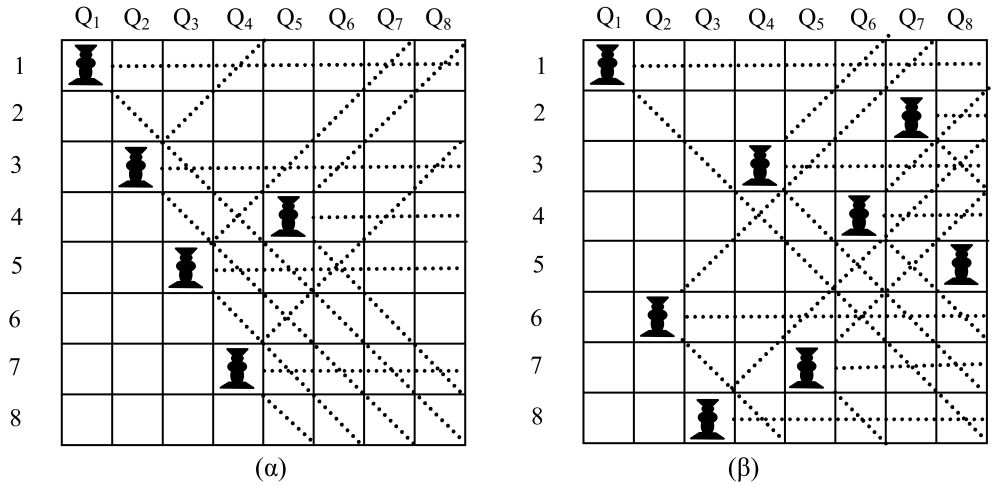
Έστω τώρα ότι στις μεταβλητές Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 δόθηκαν οι τιμές 1, 3, 5, 7 και 4 αντίστοιχα. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.9.α, δεν είναι δυνατό η παραπάνω ανάθεση τιμών να οδηγήσει σε λύση, καθώς το πεδίο της Q_6 δεν έχει διαθέσιμες τιμές. Ο αλγόριθμος συνέπειας στην περίπτωση αυτή θα ανίχνευε την αδυναμία να οδηγήσει το συγκεκριμένο μονοπάτι αναζήτησης σε λύση και θα οπισθοδρομούσε σε προηγούμενη ανάθεση τιμής σε μεταβλητή δοκιμάζοντας μια νέα λύση.



Σχήμα 6.9: (α) Ανάθεση τιμών που δεν οδηγεί σε λύση και (β) λύση στο πρόβλημα των 8 βασιλισσών.

Το κέρδος από την εφαρμογή του αλγορίθμου είναι ότι η μη συνέπεια ανιχνεύθηκε μόλις δόθηκαν τιμές στις 5 πρώτες μεταβλητές, χωρίς να δοθούν τιμές στις υπόλοιπες. Όπως είναι κατανοητό το παραπάνω γεγονός μειώνει σημαντικά το χρόνο αναζήτησης λύσης, αποφεύγοντας μονοπάτια τα οποία δεν είναι δυνατό να καταλήξουν σε λύση. Το πρόβλημα των 8-βασιλισσών έχει συνολικά 92 διαφορετικές λύσεις. Μια από αυτές απεικονίζεται στο Σχήμα 6.9.β.

6.6 Μετα-Περιορισμοί

Ένας περιορισμός αποτελεί μια λογική σχέση και άρα έχει μια λογική τιμή (ψευδής ή αληθής). Ένας μετα-περιορισμός (reified constraint, meta-constraint), επιτρέπει να συσχετίσουμε τη λογική τιμή ενός περιορισμού με μια άλλη μεταβλητή περιορισμών. Η τελευταία έχει πεδίο τις τιμές 0/1, με 0 να αντιστοιχεί στη λογική τιμή ψευδές (false), ενώ το 1 στη λογική τιμή αληθές (true). Αποτελεί δηλαδή έναν περιορισμό πάνω σε περιορισμούς άρα ένα μετα-περιορισμό.

Η λογική τιμή προκύπτει από την τρέχουσα κατάσταση του προβλήματος, δηλαδή από τα τρέχοντα πεδία τιμών των μεταβλητών και τους περιορισμούς. Για παράδειγμα, έστω ότι το πεδίο τιμών της μεταβλητής X είναι το [4..10]. Ο περιορισμός

- $RV_1 = (X > 3)$, αναθέτει την τιμή 1 στη μεταβλητή RV_1, καθώς κάθε τιμή του X είναι μεγαλύτερη του 3
- $RV_2 = (X < 2)$, αναθέτει την τιμή 0 στη μεταβλητή RV_2, καθώς καμία τιμή του X δεν είναι μικρότερη του 2,

- $RV_3 = (X < 5)$, η τιμή του RV_3 είναι το πεδίο [0..1], καθώς υπάρχουν στο πεδίο τόσο τιμές που να ικανοποιούν τον περιορισμό, όσο και τιμές που καθιστούν τον περιορισμό ψευδή.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- $RV = (X < 8) \wedge RV = 1$, οπότε ο περιορισμός προστίθεται στο μοντέλο του προβλήματος και το πεδίο της μεταβλητής X γίνεται [4..7].
- $RV = (X < 8) \wedge RV = 0$: Στην περίπτωση αυτή θα προστεθεί ο περιορισμός $\neg(X < 8)$, δηλαδή στην ουσία ο περιορισμός $X \geq 8$, και άρα το πεδίο της μεταβλητής X γίνεται [8..10].

Σύμφωνα με τον ορισμό των περιορισμών που δόθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, σε ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών οι περιορισμοί του προβλήματος βρίσκονται σε σύζευξη. Η εισαγωγή των μετα-περιορισμών επιτρέπει τη χρήση όλων των κλασσικών συνδετικών της λογικής, όπως για παράδειγμα της διάζευξης, της άρνησης και της συνεπαγωγής καθιστά εφικτή την έκφραση περισσότερο πολύπλοκων περιορισμών, ιδιαίτερα σε ενδιαφέροντα βιομηχανικά προβλήματα, π.χ. ο χρονοπρογραμματισμός, όπως θα φανεί από το παράδειγμα που ακολουθεί.

Πίνακας 6.1: Στοιχεία Εργασιών στα Αυτοκίνητα του Προβλήματος.

	Αυτοκίνητο Α	**Αυτοκίνητο Β**	**Αυτοκίνητο Γ**
Ηλεκτρολογικές Εργασίες (Ηλεκτρολόγος)	120min	30min	30min
Μηχανολογικές Εργασίες (Μηχανικός)	60min	90min	60min

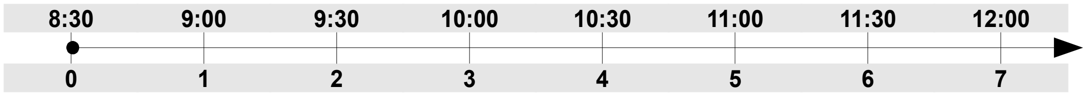
Τρία αυτοκίνητα πρέπει να κάνουν τις τυπικές διαδικασίες ετήσιας συντήρησης σε ένα συνεργείο. Το συνεργείο διαθέτει έναν ηλεκτρολόγο και έναν μηχανικό, και θα πρέπει να γίνουν οι αντίστοιχες ηλεκτρολογικές και μηχανικές εργασίες, κάθε μια με διαφορετική διάρκεια, όπως φαίνεται στον αντίστοιχο πίνακα (Πίνακας 6.1).

Σε ένα αυτοκίνητο δεν είναι δυνατό να γίνουν δύο εργασίες ταυτόχρονα. Με δεδομένο ότι το αυτοκίνητο Α θα φθάσει στο συνεργείο στις 8:30, το Β στις 9:00 και το Γ στις 9:30 θα πρέπει να βρεθεί πότε θα πρέπει να ξεκινήσει η κάθε εργασία στα αυτοκίνητα, ώστε να έχουν ολοκληρωθεί όλες μέχρι τις 12:00.

Η μοντελοποίηση του συγκεκριμένου προβλήματος περιλαμβάνει τον ορισμό έξι μεταβλητών, κάθε μια από τις οποίες αναπαριστά το χρόνο *έναρξης* της κάθε εργασίας στο αντίστοιχο αυτοκίνητο. Συνεπώς:

- A_1 και A_2: Ο χρόνος που ξεκινούν οι ηλεκτρολογικές εργασίες και οι μηχανολογικές εργασίες στο αυτοκίνητο Α, αντίστοιχα.
- B_1 και B_2: οι αντίστοιχες εργασίες στο αυτοκίνητο Β.
- $Γ_1$ και $Γ_2$: οι αντίστοιχες εργασίες στο αυτοκίνητο Γ.

Το πεδίο τιμών των παραπάνω μεταβλητών είναι χρονικές στιγμές μεταξύ των ωρών 8:30 και 12:00. Αν και θα ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθεί ως στοιχειώδης μονάδα μέτρησης του χρόνου το ένα λεπτό, για την απλοποίηση των υπολογισμών επιλέγονται τα 30 λεπτά, ξεκινώντας από τις 8:30 που είναι ο νωρίτερος χρόνος έναρξης εργασιών σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προβλήματος και αντιστοιχίζονται ακέραιες τιμές σε κάθε ημίωρο του χρονικού διαστήματος. Επιλέγονται τα ημίωρα καθώς αποτελούν τη μικρότερη μονάδα χρόνου η οποία έχει ενδιαφέρον στο πρόβλημα. Κατά συνέπεια το 0 αντιστοιχεί στις 8:30, το 1 στις 9:00, το 2 στις 9:30, ..., κ.ο.κ., όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.10.



Σχήμα 6.10:Αντιστοίχιση των ημιώρων του πεδίου σε ακέραιες τιμές.

Πλέον, οι μεταβλητές A_1, A_2, ... $Γ_1$, $Γ_2$ έχουν πεδία τιμών το διάστημα των ακεραίων [0..7]. Το πρώτο σύνολο μοναδιαίων περιορισμών προκύπτει από το χρόνο άφιξης του κάθε αυτοκινήτου, π.χ. το αυτοκίνητο Β θα έρθει στις 9:00, άρα $B_1 \geq 1$ και $B_2 \geq 1$ (Σχήμα 6.11):

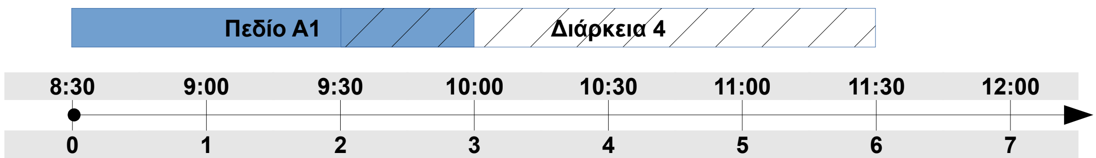
$A_1 \geq 0 \wedge A_2 \geq 0$ (άφιξη στις 8.30 - χρονική στιγμή 0)

$B_1 \geq 1 \wedge B_2 \geq 1$ (άφιξη στις 9.00 - χρονική στιγμή 1)

$Γ_1 \geq 2 \wedge Γ_2 \geq 2$ (άφιξη στις 9.30 - χρονική στιγμή 2)

Σχήμα 6.11:Αρχικά πεδία τιμών των μεταβλητών του προβλήματος, μετά την εφαρμογή των μοναδιαίων περιορισμών.

Δεδομένης της σταθερής διάρκειας κάθε εργασίας, θα πρέπει να εξασφαλιστεί ότι ο χρόνος έναρξης κάθε εργασίας έχει τέτοια τιμή ώστε να επιτρέπει την ολοκλήρωσή της μέχρι τις 12:00. Για παράδειγμα, το αυτοκίνητο Α απαιτεί ηλεκτρολογικές εργασίες (μεταβλητή A_1) διάρκειας 120 λεπτών (4 χρονικές στιγμές), οι οποίες θα πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί μέχρι τις 12:00 (χρονική στιγμή 7), και κατά συνέπεια $A_1 + 4 \leq 7$ δηλαδή $A_1 \leq 3$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.12.



Σχήμα 6.12: Η διάρκεια της εργασίας A_1, αν ο χρόνος έναρξής της είναι η χρονική στιγμή 2. Στο σχήμα εμφανίζεται το πεδίο της μεταβλητής μετά την εφαρμογή του αντίστοιχου περιορισμού.

Ομοίως: