$$\neg(\exists Z(\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(Z) \wedge \mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha(\lambda\epsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\epsilon\acute{\iota}))$$

Στη συνέχεια, γίνεται εφαρμογή των ισοδυναμιών DeMorgan και (9) έτσι ώστε να εφαρμόζεται η άρνηση μόνο σε ατομικούς τύπους:

$$\forall X\,(\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X) \vee \exists Y(\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X,Y))\,) \wedge$$
$$\forall Z(\,\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(Z) \vee \neg\mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha(\lambda\epsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\epsilon\acute{\iota})\,)$$

Τέλος, γίνεται εφαρμογή των ισοδυναμιών (10) και (12) για την ομαδοποίηση των λεκτικών:

$$\forall X\exists Y\forall Z((\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X)\vee\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X,Y))\wedge(\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(Z)\vee\neg\mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha(\lambda\epsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\epsilon\acute{\iota})))$$

Δεν απαιτείται περαιτέρω εφαρμογή ισοδυναμιών καθώς ο τύπος είναι μια σύζευξη προτάσεων (διαζεύξεων).

Κανονική μορφή κατά Skolem

Το ερώτημα που εγείρεται είναι αν είναι δυνατό να υπάρξει κάποια κανονική μορφή στην οποία να εξαλείφονται πλήρως οι ποσοδείκτες. Μια τέτοια μορφή είναι η *κανονική μορφή κατά Skolem* (ή απλώς κανονική μορφή) που πήρε το όνομα της από τον Thoraf Skolem. Στην κανονική αυτή μορφή οι υπαρξιακά ποσοτικοποιημένες εμφανίσεις μεταβλητών αντικαθίστανται από σταθερές ή συναρτήσεις καθολικά ποσοτικοποιημένων μεταβλητών, μια διαδικασία που ονομάζεται *σκολεμοποίηση* (*skolemization*). Η μετατροπή ενός τύπου που είναι σε προσημασμένη συζευκτική μορφή σε κανονική μορφή γίνεται με τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Έστω $\exists X_i$ η πρώτη από αριστερά υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή στον τύπο και $\forall X_1 \ldots \forall X_{i-1}$ οι καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές του τύπου, μέσα στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται το $\exists X_i$, δηλαδή που βρίσκονται στα "αριστερά" του $\exists X_i$, τότε:
   a) Αν το πλήθος των καθολικών μεταβλητών ($X_1 \ldots X_{i-1}$) είναι μηδέν, δηλαδή δεν υπάρχουν καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές στα αριστερά της X_i, τότε κάθε εμφάνιση της X_i στο τύπο αντικαθίσταται από μια νέα σταθερά Skolem sk_{Xi}(Skolem constant).
   b) Αν το πλήθος των καθολικών μεταβλητών είναι μεγαλύτερο του μηδενός, τότε κάθε εμφάνιση της μεταβλητής X_i στον τύπο αντικαθίσταται από μια νέα συνάρτηση Skolem (Skolem function) στις μεταβλητές $X_1 \ldots X_{i-1}$, $sk\_func_{Xi}(X_1,\ldots,X_{i-1})$.
   c) Διάγραψε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη $\exists X_i$ από τον τύπο.
2. Αν υπάρχουν άλλοι υπαρξιακοί ποσοδείκτες στον τύπο, τότε πήγαινε στο βήμα 1.
3. Διάγραψε όλους τους καθολικούς ποσοδείκτες.

Έστω για παράδειγμα, ο ακόλουθος τύπος σε προσημασμένη συζευκτική μορφή:

$$\forall X\exists Y\forall Z((\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X)\vee\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X,Y))\wedge(\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(Z)\vee\neg\mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha(\lambda\epsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\epsilon\acute{\iota})))$$

Στον τύπο υπάρχει μόνο ένας υπαρξιακός ποσοδείκτης ($\exists Y$) μέσα στην εμβέλεια του καθολικού ποσοδείκτη $\forall X$. Ο ποσοδείκτης αντικαθίσταται από τη συνάρτηση Skolem $sk\_function_Y(X)$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\forall X\forall Z(\,(\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X) \vee \sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X, sk\_func_Y(X))\,)$$

$\wedge$ ($\neg$*βλάβη*(*Z*) $\vee$ $\neg$*μηχάνημα*(*λειτουργεί*)))

Εφόσον δεν υπάρχουν άλλοι υπαρξιακοί ποσοδείκτες, διαγράφονται όλοι οι καθολικοί ποσοδείκτες από τον προηγούμενο τύπο:

($\neg$*βλάβη*(*X*) $\vee$ *σύμπτωμα*(*X*, *sk_funcY*(*X*)))

$\wedge$ ($\neg$*βλάβη*(*Z*) $\vee$ $\neg$*μηχάνημα*(*λειτουργεί*))

Όπως είναι προφανές, η συνάρτηση Skolem δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή *Z* αλλά μόνο από τη *X*. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχει διαδικασία με την οποία είναι δυνατό να μετατραπεί οποιοσδήποτε τύπος της κατηγορηματικής λογικής σε κανονική μορφή χωρίς απαραίτητα να μεσολαβήσει το στάδιο της μετατροπής της σε προσημασμένη κανονική μορφή. Ο νέος τύπος που προκύπτει από αυτήν τη διαδικασία, δεν είναι απαραίτητα πλήρως ισοδύναμος με τον αρχικό τύπο, δεν έχει δηλαδή κατά ανάγκη ακριβώς τα ίδια μοντέλα, αλλά *ασθενώς ισοδύναμος* (*weakly equivalent*). Η μετατροπή ενός τύπου σε μορφή Skolem διατηρεί τη *μη-ικανοποιησιμότητα* (***unsatisfiability***), δηλαδή ο αρχικός τύπος είναι μη-ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν η μορφή του κατά Skolem είναι μη-ικανοποιήσιμη και ανάστροφα, υπάρχει μοντέλο για τη γενική μορφή του τύπου αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο μοντέλο για την κανονική μορφή κατά Skolem.

Η ασθενής ισοδυναμία των κανονικών κατά Skolem μορφών είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς ένα σύνολο προτάσεων *S*, που είναι μη-ικανοποιήσιμο, παραμένει μη ικανοποιήσιμο και στην Skolem μορφή του. Το τελευταίο σημαίνει ότι αν χρησιμοποιηθεί μια αποδεικτική διαδικασία βασισμένη στην εις άτοπο απαγωγή, μπορούν να αποδειχτούν όλες οι προτάσεις που θα αποδεικνύονταν αν είχε επιλεγεί η κλασική μορφή της κατηγορηματικής λογικής ως μέθοδος αναπαράστασης.

Προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής

Ο τελευταίος μετασχηματισμός αφορά στη μετατροπή ενός τύπου κανονικής μορφής σε ένα σύνολο προτάσεων, δηλαδή στην *προτασιακή μορφή* της λογικής (*clausal form*)[9]. Ο μετασχηματισμός βασίζεται στον κανόνα της απαλοιφής σύζευξης, που έχει τη μορφή:

$$\frac{p \wedge q}{p} \text{ και } \frac{p \wedge q}{q} \qquad (\textit{απαλοιφή σύζευξης})$$

Έτσι, ένας τύπος της μορφής $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$ μετατρέπεται στο σύνολο των τύπων $\{p,q,r,s,t\}$. Είναι προφανές ότι αν οι προηγούμενοι κανόνες εφαρμοστούν σε έναν τύπο που είναι εκφρασμένος στην κανονική μορφή κατά Skolem, τότε το σύνολο των τύπων που προκύπτει αποτελείται από προτάσεις (διαζεύξεις λεκτικών στοιχείων). Για παράδειγμα, ο τύπος:

($\neg$*βλάβη*(*X*)$\vee$ *σύμπτωμα*(*X*, *sk_funcY*(*X*)))

$\wedge$($\neg$*βλάβη*(*Z*)$\vee$$\neg$*μηχάνημα*(*λειτουργεί*))

μετατρέπεται στις προτάσεις:

$\neg$*βλάβη*(*X*)$\vee$ *σύμπτωμα*(*X*, *sk_funcY*(*X*))

[9] Ο όρος *προτασιακή μορφή της λογικής* αποτελεί μετάφραση του *clausal form of predicate logic* και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την προτασιακή λογική (propositional logic).

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(Z)\vee\neg\mu\eta\chi\acute{\alpha}\nu\eta\mu\alpha(\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\varepsilon\acute{\iota})$

Η διαδικασία μετατροπής ενός τύπου σε προτασιακή μορφή περιλαμβάνει επίσης και ένα βήμα μετονομασίας των μεταβλητών σε περίπτωση που δύο προτάσεις έχουν μεταβλητές με κοινά ονόματα. Για παράδειγμα, οι επόμενες δύο προτάσεις:

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X) \vee \sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X, \theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma) \vee \acute{\varepsilon}\nu\tau\alpha\sigma\eta(\theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma,\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta)$

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X) \vee \neg\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\mu\alpha(Z,X,\delta\varepsilon\nu\_\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\varepsilon\acute{\iota}) \vee \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta(Z)$

μετονομάζοντας τη μεταβλητή X σε W στη δεύτερη πρόταση, μετατρέπονται στις:

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X) \vee \sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X, \theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma) \vee \acute{\varepsilon}\nu\tau\alpha\sigma\eta(\theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma,\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta)$

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(W) \vee\neg\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\mu\alpha(Z,W,\delta\varepsilon\nu\_\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\varepsilon\acute{\iota}) \vee \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta(Z)$

Μορφή Kowalski

Μια εναλλακτική μορφή της προτασιακής μορφής της λογικής (clausal form of logic) με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι η μορφή Kowalski. Σε αυτήν όλες οι προτάσεις εκφράζονται ως λογικές ισοδυναμίες της μορφής:

$q_1, q_2,\ldots, q_n \to r_1, r_2,\ldots, r_m$

Σε αυτήν την έκφραση οι ατομικοί τύποι r_i είναι σε διάζευξη, ενώ οι q_j σε σύζευξη. Τα r_i αποτελούν τα *συμπεράσματα* της πρότασης, ενώ τα q_j τις *υποθέσεις* της. Τόσο τα συμπεράσματα όσο και οι υποθέσεις είναι ατομικοί τύποι και όχι λεκτικά στοιχεία, δηλαδή δεν περιέχουν αρνήσεις ατομικών τύπων.

Η διαδικασία μετατροπής μιας πρότασης σε μορφή Kowalski είναι εξαιρετικά απλή. Για παράδειγμα, έστω η πρόταση:

$p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee t$

Το πρώτο βήμα αφορά στη συγκέντρωση όλων των ατομικών τύπων σε άρνηση στο αριστερό μέρος της πρότασης, με εφαρμογή της ισοδυναμίας $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$:

$\neg q \vee \neg s \vee p \vee r \vee t$

Το δεύτερο βήμα αποτελεί εφαρμογή του νόμου DeMorgan $\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$:

$\neg(q \wedge s) \vee p \vee r \vee t$

Το τρίτο βήμα αποτελεί εφαρμογή της ισοδυναμίας $(p\to q) \Leftrightarrow \neg p\vee q$:

$q \wedge s \to p \vee r \vee t$

Το τελευταίο βήμα αφορά στην αντικατάσταση των συμβόλων της σύζευξης και διάζευξης με το σύμβολο ",".

$q, s \to p, r, t$

Για παράδειγμα, οι προτάσεις:

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X)\vee \sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X, \theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma) \vee \acute{\varepsilon}\nu\tau\alpha\sigma\eta(\theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma, \mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta)$

$\neg\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(W)\vee\neg\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\mu\alpha(Z, W, \delta\varepsilon\nu\_\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\varepsilon\acute{\iota}) \vee \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta(Z)$

μετατρέπονται στην ακόλουθη μορφή Kowaski:

$\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(X) \to \sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\mu\alpha(X, \theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma), \acute{\varepsilon}\nu\tau\alpha\sigma\eta(\theta\acute{o}\rho\upsilon\beta o\varsigma, \mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta)$

$\beta\lambda\acute{\alpha}\beta\eta(W), \varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\mu\alpha(Z, W, \delta\varepsilon\nu\_\lambda\varepsilon\iota\tau o\upsilon\rho\gamma\varepsilon\acute{\iota}) \to \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta(Z)$