

*if-then* που έχουν πάντα ασαφή σύνολα ως είσοδο στις συνθήκες τους (*if* τμήμα). Οι συνθήκες κάθε κανόνα μπορεί να είναι μία ή περισσότερες, οπότε συνδυάζονται με τους τελεστές AND, OR και NOT της ασαφούς λογικής (βλ. *τομή*, *ένωση* και *συμπληρωματικό* ασαφών συνόλων στην ενότητα 14.2.2). Στα επόμενα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα χρησιμοποιήσουμε κανόνες με τελεστή AND στο *if* τμήμα. Ανάλογα με τη μορφή της εξόδου των κανόνων (*then* τμήμα), διακρίνονται τρία είδη συστημάτων ασαφούς συλλογιστικής:

- *Mandani*, όπου η έξοδος των κανόνων είναι ασαφή σύνολα που συνδυάζονται και παράγουν μια αριθμητική τιμή μέσω μια διαδικασίας απο-ασαφοποίησης,
- *Sugeno*, όπου η έξοδος των κανόνων είναι crisp τιμή, συνάρτηση των crisp εισόδων και η τελική τιμή προκύπτει με συνδυασμό των επί μέρους εξόδων, και
- *Tsukamoto*, όπου η έξοδος κάθε κανόνα είναι μεν ασαφές σύνολο αλλά με μονότονη συνάρτηση συμμετοχής και παράγει crisp αποτέλεσμα. Τα επιμέρους crisp αποτελέσματα συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό αποτέλεσμα.

Παρουσιάζεται στη συνέχεια το πλαίσιο κάθε μιας από τις παραπάνω συλλογιστικές μέσω απλού παραδείγματος και υπολογισμού της εξόδου με γραφικό τρόπο.

### 14.5.1 Ασαφής Συλλογιστική Mandani

Στην *ασαφή συλλογιστική Mandani* υπάρχουν  $m$  κανόνες με τη γενική μορφή:

$$R^k: \text{ IF } x_1=A_1^k \text{ AND } x_2=A_2^k \text{ AND... AND } x_n=A_n^k \text{ THEN } y^k=B^k$$

όπου τα  $A_i^k$  είναι ασαφή σύνολα (fuzzy input) και  $k=1..m$ . Η έξοδος κάθε κανόνα είναι επίσης ένα ασαφές σύνολο  $B^k$  και συνήθως περισσότεροι του ενός κανόνες συμβάλουν στο τελικό αποτέλεσμα. Επομένως, με βάση την είσοδο, πρέπει να βρεθούν οι κανόνες που ικανοποιούνται οι συνθήκες τους και να υπολογιστεί η έξοδός τους με βάση συλλογιστική GMP (βλ. Ενότητα 14.4.2). Στη συνέχεια πρέπει να γίνει συνάθροιση των επί μέρους αποτελεσμάτων (βλ. Ενότητα 14.4.3) και τέλος απο-ασαφοποίηση ώστε να ληφθεί μία crisp τιμή (βλ. Ενότητα 14.4.4).

Υπάρχει εδώ ένα σημείο προσοχής, καθώς οι κανόνες έχουν πολλαπλές συνθήκες στο *if* τμήμα τους. Στην ενότητα 14.2.2 ειπώθηκε ότι το AND της ασαφούς λογικής αντιστοιχεί στην τομή ασαφών συνόλων (σχέση (3)) και υλοποιείται λαμβάνοντας τα min των εμπλεκόμενων συναρτήσεων συμμετοχής. Επομένως από όλα τα  $\mu_{A_i^k}(x_i)$ , το μικρότερο θα είναι αυτό που θα διαμορφώσει την έξοδο του κανόνα.

#### Παράδειγμα με διαγραμματική επίλυση

Έστω σύστημα ασαφών κανόνων:

$$R^1: \text{ IF } x_1=A_1^1 \text{ AND } x_2=A_2^1 \text{ THEN } y^1= B^1$$

$$R^2: \text{ IF } x_1=A_1^2 \text{ AND } x_2=A_2^2 \text{ THEN } y^2= B^2$$

με τα ασαφή σύνολα  $A_1^1, A_2^1, B^1, A_1^2, A_2^2$  και  $B^2$  να απεικονίζονται στο Σχήμα 14.14. Θεωρούμε ότι το σύστημα περιλαμβάνει περισσότερους κανόνες και ότι σε δεδομένο χρονικό σημείο, δέχτηκε είσοδο  $x_1=1.2$  και  $x_2=20$  με βάση την οποία οι συγκεκριμένοι δύο κανόνες ικανοποιούν τις συνθήκες τους και παράγουν έξοδο (αυτό σημαίνει ότι τα

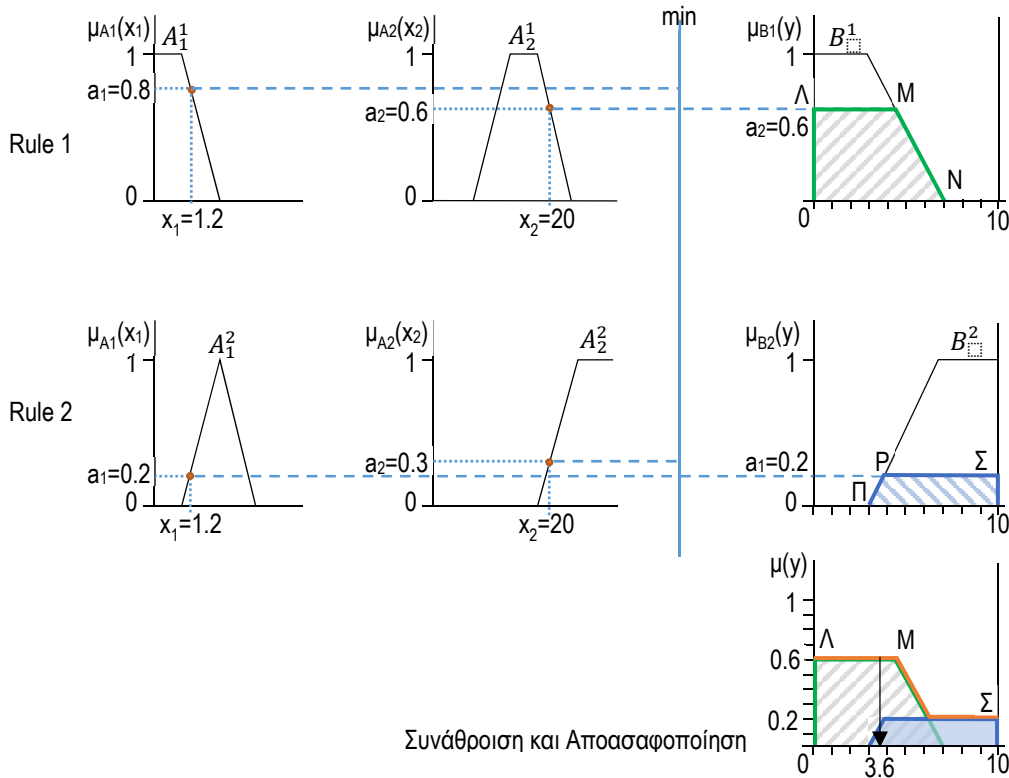
$x_1$  και  $x_2$  είναι στο εύρος τιμών που οι συναρτήσεις συμμετοχής των  $A_i^k$  έχουν μη μηδενική τιμή). Το ζητούμενο είναι η συνολική crisp έξοδος που παράγεται.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι με βάση τον κανόνα  $R_1$ , το  $x_1=1.2$  μπορεί να θεωρηθεί  $A_1^1$  σε βαθμό  $a_1=0.8$ , ενώ το  $x_2=20$  μπορεί να θεωρηθεί  $A_2^1$  σε βαθμό  $a_2=0.6$ . Επομένως το *if* τμήμα του κανόνα  $R_1$  ικανοποιείται. Δεδομένου ότι οι δύο συνθήκες συνδέονται με *AND*, την έξοδο θα τη διαμορφώσει το μικρότερο, δηλαδή το  $a_2$  (βλ. σχέση (2) στην Ενότητα 14.2.2). Η οριζόντια γραμμή σε ύψος  $a_2=0.6$ , προεκτεινόμενη δεξιά "κόβει" την  $\mu_{B1}(y)$  σε ύψος 0.6 και διαμορφώνει την έξοδο στην γραμμή ΛΜΝ (βλ. και παράδειγμα στο Σχήμα 14.9).

Όμοια διαπιστώνεται ότι η είσοδος ενεργοποιεί και τον κανόνα  $R_2$  οπότε με παρόμοια εργασία προκύπτει ότι η έξοδος του διαμορφώνεται στη γραμμή ΠΡΣ.

Οι δύο έξοδοι πρέπει τώρα να συναθροιστούν για να ληφθεί το συνολικό αποτέλεσμα. Χρησιμοποιώντας συνάθροιση *max* (βλ. Ενότητα 14.4.3) προκύπτει το ασαφές σύνολο που οριοθετεί η καμπύλη ΛΜΣ στο κάτω-δεξιά διάγραμμα στο Σχήμα 14.14.

Για την τελική crisp τιμή εξόδου  $y^*$  απαιτείται απο-ασαφοποίηση. Χρησιμοποιώντας την δειγματοληπτική εκδοχή της centroid για τιμές  $y = 0, 2, 4, 6, 8$  και  $10$  έχουμε:



Σχήμα 14.14: Επιμέρους αποτελέσματα κανόνων σε σύστημα ελέγχου Mandani (με γραφική επίλυση), συνάθροιση και αποασαφοποίηση (κάτω δεξιά).

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^6 \mu(y_i) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^6 \mu(y_i)} = \frac{0.6 \cdot 0 + 0.6 \cdot 2 + 0.6 \cdot 4 + 0.3 \cdot 6 + 0.2 \cdot 8 + 0.2 \cdot 10}{0.6 + 0.6 + 0.6 + 0.3 + 0.2 + 0.2} = 3.6$$

### 14.5.2 Ασαφής Συλλογιστική Sugeno

Στην *ασαφή συλλογιστική Sugeno*, η έξοδος των κανόνων είναι κάποιος γνωστός γραμμικός συνδυασμός των εισόδων του, δηλαδή οι κανόνες είναι της μορφής:

$$R^k: \text{ IF } x_1=A_1^k \text{ AND } x_2=A_2^k \text{ AND... AND } x_n=A_n^k \text{ THEN } y^k=f^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

όπου τα  $A_i^k$  είναι ασαφή σύνολα και η  $f^k$  γνωστή συνάρτηση. Το τελικό αποτέλεσμα του συστήματος κανόνων είναι μία crisp τιμή  $y^*$  που προκύπτει συνδυάζοντας τα crisp αποτελέσματα  $y^k$  των επιμέρους κανόνων (όσων ικανοποιούν τις συνθήκες τους) με μια διαδικασία σταθμισμένου μέσου όρου (*weighted average*):

$$y^* = \frac{\sum a^k \cdot y^k}{\sum a^k} \quad (23)$$

όπου το  $a^k$  για κάθε κανόνα  $R^k$  δίνεται από τη σχέση:

$$a^k = \min(\mu_{A_1^k}(x_1), \mu_{A_2^k}(x_2), \dots, \mu_{A_n^k}(x_n)) \quad (24)$$

σύμφωνα και με την τομή ασαφών συνόλων (βλ. σχέση (3) στην Ενότητα 14.2.2).

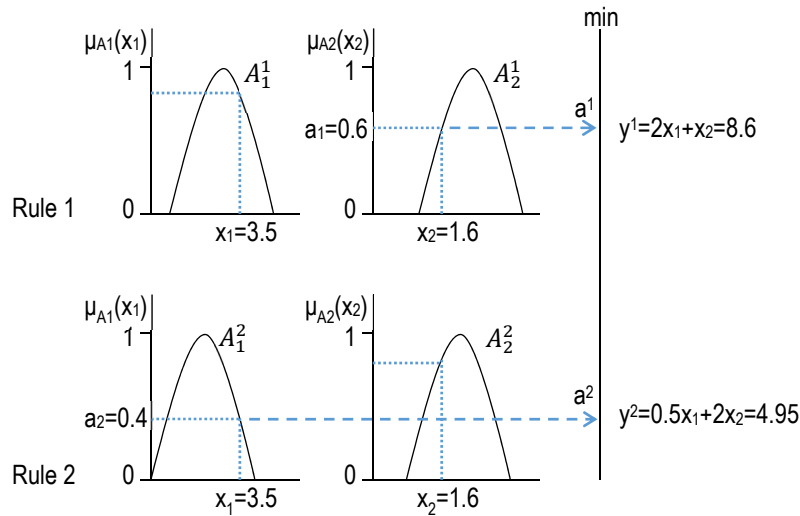
#### Παράδειγμα με διαγραμματική επίλυση

Έστω ένα σύστημα Sugeno με τους ακόλουθους δύο κανόνες:

$$R^1: \text{ IF } x_1=A_1^1 \text{ AND } x_2=A_2^1 \text{ THEN } y^1=f^1(x_1, x_2)=2x_1+x_2$$

$$R^2: \text{ IF } x_1=A_1^2 \text{ AND } x_2=A_2^2 \text{ THEN } y^2=f^2(x_1, x_2)=0.5x_1+2x_2$$

και λοιπά στοιχεία όπως στο διάγραμμα στο Σχήμα 14.15.



Σχήμα 14.15: Επιμέρους αποτελέσματα κανόνων σε σύστημα Sugeno (με γραφική επίλυση).

Έστω ότι  $x_1=3.5$  και  $x_2=1.6$  οι εισοδοί του συστήματος και ότι οι δύο κανόνες ικανοποιούν το *if* τμήμα τους (αυτό σημαίνει ότι τα  $x_1$  και  $x_2$  είναι στο εύρος τιμών που οι