
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Λογική

Ασκήσεις - Ερωτήσεις

- Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας ότι:
 - ο τύπος $P \vee \neg P$ είναι ταυτολογία
 - ο τύπος $P \wedge \neg P$ είναι αντίφαση
 - ισχύουν οι νόμοι De Morgan
- Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας ότι οι παρακάτω τύποι είναι ταυτολογίες:
 - $P \wedge \neg P \rightarrow Q$
 - $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow Q$
 - $(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P$
 - $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P$
- Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας ότι οι παρακάτω τύποι είναι αντιφάσεις:
 - $P \wedge \neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$
 - $P \leftrightarrow \neg P$
- Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας τις παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:
 - $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
 - $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \Leftrightarrow A$
 - $\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge A)$
- Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας την ορθότητα των ισοδυναμιών της ενότητας 9.1.1 (Πίνακας 9.5).
- Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας την ορθότητα των κανόνων συμπερασμού της ενότητας 9.1.2 (Πίνακας 9.7).
- Ελέγξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας αν ισχύουν οι παρακάτω λογικές συνεπαγωγές:

- α) $(P \rightarrow Q) \models (P \wedge Q)$
 β) $(P \wedge Q) \models (P \rightarrow Q)$
8. Με την χρήση των λογικών ισοδυναμιών της ενότητας 9.1.1 (Πίνακας 9.5) να αποδειχθούν οι ταυτολογίες, αντιφάσεις και λογικές ισοδυναμίες των ασκήσεων 1 έως 4.
9. Μετατρέψτε τις ακόλουθες προτάσεις σε συζευκτική κανονική μορφή:
 α) $A \vee (B \wedge C)$
 β) $A \leftrightarrow (B \wedge C)$
 γ) $(\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C)) \rightarrow D$
 δ) $\neg(A \rightarrow \neg C) \wedge (\neg B \rightarrow C)$
10. Με την χρήση της αρχής της ανάλυσης εξετάστε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι έγκυρος:
 $A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \models A \rightarrow C$
11. Χρησιμοποιώντας οποιουδήποτε κανόνες συμπερασμού, πραγματοποιήστε τις ακόλουθες αποδείξεις:
 α) $\neg Q \vee P, \neg R \rightarrow \neg P, S, S \rightarrow \neg R, T \rightarrow P \vdash \neg T \wedge \neg Q$
 β) $A \vee B \rightarrow C, C \wedge D \rightarrow E, E \rightarrow F \wedge G, B, Q \rightarrow D, Q \vdash G$
 γ) *Emerald* \rightarrow *Precious*, *Gem* \wedge *Green* \rightarrow *Emerald*, *Precious* \vee *Rare* \rightarrow *Wanted*, *Wanted* \rightarrow *Buy*, *Precious* \rightarrow *Spend*, *Gem*, *Green* \vdash *Spend* \wedge *Buy*
- Στη συνέχεια, πραγματοποιήστε τις ίδιες αποδείξεις χρησιμοποιώντας αποκλειστικά την αρχή της ανάλυσης, αρχικά χωρίς την χρήση της απαγωγής σε άτοπο και στη συνέχεια με την χρήση της απαγωγής σε άτοπο.
12. Να διατυπωθούν σε κατηγορηματική λογική οι ακόλουθες προτάσεις:
 α) Δεν είναι όλοι οι συγγραφείς βιβλίων διάσημοι.
 β) Μερικά βιβλία είναι διάσημα.
 γ) Ένα βιβλίο είναι διάσημο αν και μόνο αν είναι καλογραμμένο.
 δ) Όλοι οι στιχουργοί είναι ποιητές.
 ε) Μερικοί στιχουργοί είναι ποιητές.
 στ) Κανένας ποιητής δεν είναι στιχουργός.
 ζ) Όλοι αγαπούν κάποιον.
 η) Υπάρχει κάποιος που τον αγαπούν όλοι.
 θ) Πίσω από κάθε επιτυχημένο άνδρα κρύβεται μία φιλόδοξη γυναίκα.
 ι) Κανένας άνθρωπος δεν είναι μεγαλύτερος από τον πατέρα του/της.
13. Προσπαθήστε να διατυπώσετε σε κατηγορηματική λογική τις ακόλουθες προτάσεις. Θα διαπιστώσετε ότι οι προτάσεις είναι αμφίσημες. Συνεπώς κωδικοποιήστε την κάθε πρόταση με τουλάχιστον δύο διαφορετικούς τρόπους στην κατηγορηματική λογική.
 α) Ο Κώστας απεχθάνεται έναν μαθηματικό.

- β) Ο Γιώργος συκοφαντεί τον Κώστα και τους γονείς του.
 γ) Ένας μαθητής είναι καλύτερος από έναν δάσκαλο.
 δ) Μόνο οι πλούσιοι Γερμανοί αγοράζουν σπίτια στο Μόναχο.
 ε) Στον Σωτήρη αρέσει ένα γρήγορο αμάξι.
 στ) Μερικά λάθη έγιναν από όλους.
14. Διατυπώστε στην κατηγορηματική λογική τον ακόλουθο ισχυρισμό και αποδείξτε ότι είναι έγκυρος:
Όλοι οι φιλόσοφοι που έχουν μελετήσει λογική ξέρουν τον Gödel. Συνεπώς, εάν όλοι οι φιλόσοφοι έχουν μελετήσει λογική, τότε όλοι ξέρουν τον Gödel.
15. Αποδείξτε με την χρήση των κανόνων συμπερασμού της κατηγορηματικής λογικής (Πίνακας 9.9) τις ακόλουθες συνεπαγωγές στην κατηγορηματική λογική:
 α) $\forall X (p(X) \rightarrow q(X)) \vdash \neg q(a) \rightarrow \neg p(a)$
 β) $\forall X (p(X) \rightarrow q(X)), p(a) \vdash \exists Y q(Y)$
 γ) $\exists X \neg p(X,a) \vdash \exists Z \neg \forall Y p(Y,Z)$
 δ) $\exists X \exists Y \forall Z \forall W p(X,Y,Z,W) \vdash \forall Z \exists X \forall W \exists Y p(X,Y,Z,W)$
16. Μετατρέψτε την ακόλουθη πρόταση σε Κανονική Μορφή κατά Skolem:
 $(\forall X \text{ άνθρωπος}(X) \rightarrow \text{θηλαστικό}(X)) \wedge (\exists Y \text{ άνθρωπος}(Y))$
17. Μετατρέψτε όλες τις προτάσεις των ασκήσεων 12 έως 14, σε:
 α) Προσημασμένη συζευκτική κανονική μορφή
 β) Κανονική μορφή κατά Skolem
 γ) Προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής
 δ) Μορφή Kowalski
 ε) Εξετάστε αν οι προτάσεις που προκύπτουν στην μορφή Kowalski είναι προτάσεις Horn.
18. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ενοποίησης που δόθηκε σε σχετική ενότητα, βρείτε το γενικότερο ενοποιητή των παρακάτω λογικών τύπων:

<i>πατέρας(νίκος, X)</i>	<i>πατέρας(Y, θανάσης)</i>
<i>επάγγελμα(X, μισθός(υψηλός), ωράριο(12))</i>	<i>επάγγελμα(νίκος, Y, Z)</i>
<i>μηχανή(μέρος(έμβολο), λειτουργεί)</i>	<i>μηχανή(X, βλάβη)</i>
19. Θεωρήστε τη βάση γνώσης του ζωικού βασιλείου που δόθηκε στην ενότητα της κατηγορηματικής λογικής.
 α) Μετασηματίστε τις προτάσεις που δίνονται, στην προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής.
 β) Κωδικοποιήστε τη γνώση "ο αετός έχει φτερά" και "ο αετός γεννάει αυγά" στη λογική και αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της ανάλυσης και τη βάση γνώσης που δίδεται ότι είναι πουλί.

20. Έστω το ακόλουθο σενάριο μιας τηλεοπτικής σειράς ("σαπουνόπερα") (από το βιβλίο του N. Wirth, "Algorithms + Data Structures = Programs". Άσκηση που περιέχεται και στο βιβλίο [Luger, 2002]):

"...παντρεύτηκα μια χήρα, η οποία ήδη είχε μια ενήλικη κόρη. Ο πατέρας μου, ο οποίος μας επισκεπτόταν συχνά, ερωτεύτηκε τη θετή μου κόρη και την παντρεύτηκε. Έτσι ο πατέρας μου έγινε γαμπρός μου και η θετή μου κόρη μητριά μου. Μετά από μερικούς μήνες, η σύζυγός μου απέκτησε ένα γιο ο οποίος έγινε κουνιάδος του πατέρα μου και θείου μου. Η σύζυγος του πατέρα μου απέκτησε επίσης ένα γιο."

- α) Εκφράστε στην κατηγορηματική λογική το παραπάνω σενάριο καθώς και τις οικογενειακές σχέσεις που εμπεριέχονται στο παραπάνω σενάριο (γαμπρός, θετή κόρη, κτλ).
- β) Αποδείξτε ότι ο ομιλητής είναι παππούς του εαυτού του.

21. Έστω κάποιος θέλει να ενοικιάσει ένα διαμέρισμα έχοντας τις εξής απαιτήσεις:

- Το διαμέρισμα πρέπει να έχει εμβαδόν τουλάχιστον 45m² και τουλάχιστον 2 υπνοδωμάτια.
- Αν ο διαμέρισμα βρίσκεται στον 3ο όροφο και πάνω, η πολυκατοικία πρέπει να έχει ανελκυστήρα.
- Ο κανονισμός της πολυκατοικίας πρέπει να επιτρέπει κατοικίδια ζώα.
- Ο ενοικιαστής προτίθεται να πληρώσει 300€ ενοίκιο για ένα διαμέρισμα στο κέντρο της πόλης το οποίο έχει εμβαδόν 45 m².
- Για ένα παρόμοιο διαμέρισμα στα προάστια προτίθεται να πληρώσει 250€.
- Για κάθε τετραγωνικό μέτρο πέραν των 45 προτίθεται να πληρώσει 5€ παραπάνω.
- Αν υπάρχει και κήπος στην πολυκατοικία προτίθεται να πληρώσει 2€ παραπάνω για κάθε τετραγωνικό μέτρο κήπου που του αναλογεί.
- Ο ενοικιαστής δεν μπορεί να πληρώσει συνολικά πάνω από 400€.
- Εάν υπάρχουν πολλαπλές επιλογές, προτιμάει το φθηνότερο διαμέρισμα.
- Δεύτερη προτεραιότητα στις επιλογές του έχει η παρουσία (και το μέγεθος) του κήπου.
- Τη χαμηλότερη προτεραιότητα στις επιλογές του έχει το μέγεθος του διαμερίσματος.

Ο παρακάτω πίνακας αναγράφει τα διαθέσιμα διαμερίσματα καθώς και τα χαρακτηριστικά τους.

- α) Να αναπαρασταθούν σε αναιρέσιμη λογική τα διαθέσιμα διαμερίσματα, οι απαιτήσεις του ενοικιαστή, καθώς και το πρόβλημα επιλογής διαμερίσματος.
- β) Ποια από τα διαθέσιμα διαμερίσματα ικανοποιούν τις απαιτήσεις του ενοικιαστή; Ποιο από αυτά θα προτιμήσει;

Διεύθυνση	Υπνο- δωμάτια	Εμβα- δόν	Κέντρο πόλης	Όρο- φος	Ανελκυ- στήρας	Κατοι- κίδια	Εμβαδόν Κήπου	Ενοίκιο
Β. Γεωργίου 35	1	50	ναι	1	όχι	ναι	0	300
Αγγελάκη 7	2	45	ναι	0	όχι	ναι	0	335
Κηφισίας 10	2	65	όχι	2	όχι	ναι	0	350
Πλαστήρα 72	2	55	όχι	1	ναι	όχι	15	330
Τσιμισκή 97	3	55	ναι	0	όχι	ναι	15	350
Πολυτεχνείου 19	2	60	ναι	3	όχι	όχι	0	370
Ερμού 22	3	65	ναι	1	όχι	ναι	12	375